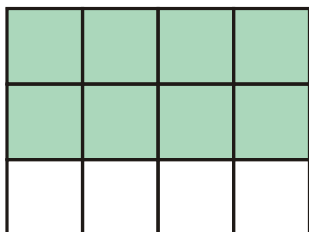


1.1.9 Zlomky II

Předpoklady: 010108

Př. 1: Nakresli obdélník, na kterém namodeluješ zlomky $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$ a dokážeš, že reprezentují stejné číslo.



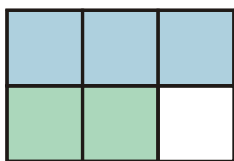
- Obdélník je rozdělen na tři řádky, dva jsou vybarvené $\Rightarrow$ vybarvené jsou dvě třetiny.
- Obdélník je rozdělen na šest dvoučtverečků, čtyři jsou vybarvené $\Rightarrow$ vybarvené jsou čtyři šestiny.
- Obdélník je rozdělen na dvanáct čtverečků, osm je vybarvených $\Rightarrow$ vybarvených je osm dvanáctin.

Př. 2: Máš polovinu papíru (zlomek $\frac{1}{2}$). Popiš, jak tento papír přeměníš, aby představoval zlomky $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$.

Vezmeme polovinu papíru (zlomek $\frac{1}{2}$) a rozstříhneme ho na dva stejné kousky. Získáme dva čtvrtinové kousky papíru (zlomek $\frac{2}{4}$).

Vezmeme polovinu papíru (zlomek $\frac{1}{2}$) a rozstříhneme ho na pět stejných kousků. Získáme pět desetinových kousků papíru (zlomek $\frac{5}{10}$).

Př. 3: Nakresli obdélník 2 x 3 a namodeluj na něm sčítání $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.



Modře je vybarvena polovina obdélníku, zeleně třetina $\Rightarrow$ vybarveno je pět šestin obdélníku $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Př. 4: Stanov postup pro sčítání zlomků.

- Pokud zlomky nemají stejného jmenovatele, rozšíříme je tak, aby byl jejich jmenovatel stejný (nejlépe pomocí nejmenšího společného násobku).
- Sečteme čitatele rozšířených zlomků.

Typický žákovský postup vypadá takto:

Sestavíme nejmenší společný násobek obou jmenovatelů.

Čitatele prvního zlomku vynásobíme číslem, který musíme vynásobit jmenovatele prvního zlomku, abychom dostali společný násobek. Čitatele druhého zlomku vynásobíme číslem, kterým musíme vynásobit jmenovatele druhého zlomku, abychom dostali společný násobek. Sečteme získané čitatele.

Porovnáme si oba postupy:

• Pokud zlomky nemají stejného jmenovatele, rozšíříme je tak, aby byl jejich jmenovatel stejný (nejlépe pomocí nejmenšího společného násobku) (získáváme stejné kousky). • Sečteme čitatele rozšířených zlomků (počty kousků).	• Sestavíme nejmenší společný násobek obou jmenovatelů. • Čitatele prvního zlomku vynásobíme číslem, který musíme vynásobit jmenovatele prvního zlomku, abychom dostali společný násobek. Čitatele druhého zlomku vynásobíme číslem, kterým musíme vynásobit jmenovatele druhého zlomku, abychom dostali společný násobek. • Sečteme získané čitatele.
Stručný popis z několika málo kroků.	Velice detailní popis kroků, pomocí zcela základních operací $\Rightarrow$ poměrně velký objem operací na zapamatování.
Důvody používání právě tohoto postupu jsou vcelku zřejmé.	Není moc jasné, proč zrovna tento postup.
Musíme znát další postupy, na které se odkazujeme.	Nepotřebujeme vědět skoro nic dalšího.

Proč je výhodnější pamatovat si postupy tak, jak je uvedeno v levém sloupci?

- Kromě dvou výhod v prvních řádcích, je dlouhodobě výhodné i odkazování na další postupy. Každým použitím si odkazované postupy připomínáme a je tak větší pravděpodobnost, že si je budeme pamatovat.
- Postupy podobné příkladu v pravém sloupci jsou velmi náchylné k náhodným chybám, jsou daleko náročnější na zapamatování a nedávají tolik příležitostí k opravě.

Pedagogická poznámka: Poměrně často se objevují postupy, které poměrně podrobně zachycují rozšiřování zlomků na stejné jmenovatele, ale místo sčítání čitateľů uvádějí jako druhý krok sečtení zlomků. Upozorňuji, že je divné, když postup na sčítání zlomků obsahuje jako jeden z kroků pokyn sečti zlomky.

Př. 5: Jaký význam má při sčítání zlomků převedení na společného jmenovatele?

Převáděním na společného jmenovatele vytváříme zlomky, které jsou rozděleny na stejně velké části (a ty je možné sečíst).

Př. 6: Rozhodni, které z následujících úprav jsou nesmyslné. Rozhodnutí zdůvodni na libovolném modelu.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{3-2} = 1$

d) $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$: špatně. Při sčítání dáváme na jednu hromadu stejně velké kousky. Tím se nemůže změnit jejich velikost a už vůbec nemůžeme získat méně, než jsme měli na počátku.

b) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$: správně. Hromadu se třemi čtvrtinovými kousky můžeme rozdělit na dvě (se dvěma a s jedním kouskem). Dva čtvrtinové kousky znamenají jeden poloviční.

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{3-2} = 1$: špatně. Při odečítání odebíráme z jedné hromady kousků jejich část. Tím se nemůže změnit velikost kousku a už vůbec nemůžeme získat víc, než jsme měli na počátku.

d) $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$: špatně. Máme tři hromady, na každé dva třetinové kousky. Dohromady máme pořád třetinové kousky. Tím, že jsou hromady tři, se nemůže změnit velikost kousků na nich.

Př. 7: Vypočti a výsledky popiš pomocí modelu.

a) $2 \cdot \frac{1}{3}$

b) $2 \cdot \frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{2} : 2$

d) $\frac{1}{2} \cdot 3$

e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

h) $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$

a) $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (dvě hromádky, na každé jeden třetinový kousek $\Rightarrow$ máme dva třetinové kousky)

b) $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (dvě hromádky, na každé tři čtvrtinové kousky $\Rightarrow$ máme šest čtvrtinových kousků, vždy ze dvou čtvrtinových kousků sestavíme jeden poloviční $\Rightarrow$ máme $6 : 2 = 3$ poloviční kousky)

c) $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$ (poloviční kousek si rozdělíme na dvě stejné poloviny $\Rightarrow$ na každé polovině bude jeden čtvrtinový kousek)

d) $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ (rozdělíme tři celky na dvě stejné hromádky $\Rightarrow$ na každé z hromádek budou tři poloviční kousky - jeden kousek z každého původního celku)

e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (poloviční kousek rozdělíme na třetiny $\Rightarrow$ na každé hromádce bude jedna šestina původního celku)

f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (na hromádce jsou dva třetinové kousky, bereme polovinu $\Rightarrow$ budeme mít jeden třetinový kousek)

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ (třetina ze tří polovin je jedna polovina, dvojnásobek jedné poloviny je celek)

h) $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ (polovina ze čtyř třetin jsou dvě třetiny)

Př. 8: Je dán zlomek $\frac{x}{y}$, kde x, y jsou kladná reálná čísla. Jak se mění velikost zlomku, když se mění hodnoty čísla x ? Jak se mění velikost zlomku s hodnotami čísla y ? Zdůvodni.

Pokud zvětšujeme číslo x hodnota zlomku roste (zvětšuje se počet částí), pokud číslo x zmenšujeme hodnota zlomku se zmenšuje (zmenšuje se počet částí).

Pokud zvětšujeme číslo y hodnota zlomku se zmenšuje (máme stále stejný počet menších částí), pokud číslo y zmenšujeme hodnota zlomku se zvětšuje (máme stále stejný počet čím dál větších částí).

Př. 9: Zjednoduš složený zlomek $\frac{\frac{8}{15}}{\frac{12}{25}}$. Postup zdůvodni pomocí:

a) významu zlomkové čáry

b) výsledku předchozího příkladu.

a) zlomková čára představuje operaci dělení $\Rightarrow \frac{\frac{8}{15}}{\frac{12}{25}} = \frac{8}{15} : \frac{12}{25} = \frac{8}{15} \cdot \frac{25}{12} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{10}{9}$

b) Převádíme zlomek $\frac{8}{15}$ na jednoduchý zlomek $\frac{12}{25}$ na jednoduchý zlomek $\Rightarrow$ potřebujeme vědět, které části složeného

zlomku budou u výsledného zlomku v čitateli a které ve jmenovateli:

- 8 – číselník horního zlomku $\Rightarrow$ zvětšuje číslo, které dělíme $\Rightarrow$ zvětšuje výsledek $\Rightarrow$ u výsledného zlomku bude v čitateli,
- 15 – jmenovatel horního zlomku $\Rightarrow$ zmenšuje číslo, které dělíme $\Rightarrow$ zmenšuje výsledek $\Rightarrow$ u výsledného zlomku bude ve jmenovateli,
- 12 – číselník dolního zlomku $\Rightarrow$ zvětšuje číslo, kterým dělíme $\Rightarrow$ zmenšuje výsledek $\Rightarrow$ u výsledného zlomku bude ve jmenovateli,
- 25 – jmenovatel dolního zlomku $\Rightarrow$ zmenšuje číslo, kterým dělíme $\Rightarrow$ zvětšuje výsledek $\Rightarrow$ u výsledného zlomku bude v čitateli

$$\Rightarrow \frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 25}{15 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

Př. 10: Znázorni do obdélníku:

- a) polovinu ze dvou pětín,
c) čtyři pětiny ze tří čtvrtin.

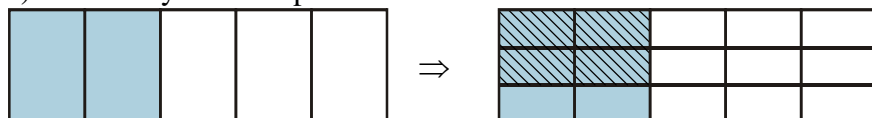
b) dvě třetiny ze dvou pětín,

a) polovina ze dvou pětín



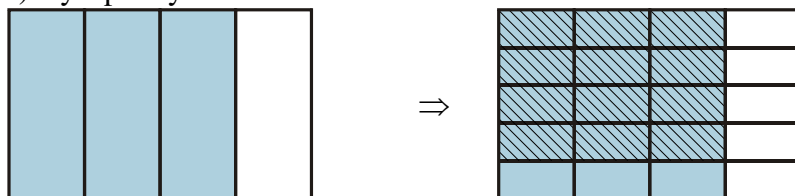
Polovina ze dvou pětín jsou dvě desetiny.

b) dvě třetiny ze dvou pětín



Dvě třetiny ze dvou pětín jsou čtyři patnáctiny.

c) čtyři pětiny ze tří čtvrtin



Čtyři pětiny ze tří čtvrtin jsou dvanáct dvaceti (tři pětiny).

Shrnutí: